ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1988

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(4 heures)

OPTION M'

Soient E l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ ($n \geqslant 2$) et $\mathfrak{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n. Dans tout le problème, on identifie les matrices colonnes à n coefficients complexes aux éléments de E et on considère les matrices lignes à n coefficients complexes comme les transposés des éléments de E. Ainsi, pour $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, $x \in E$ et $y \in E$, de transposé ${}^t y$, la multiplication usuelle des matrices rectangulaires ou carrées permet de considérer les produits

$$AB \in \mathfrak{M} \qquad Ax \in E \qquad x\,{}^t y \in \mathfrak{M}$$

ainsi que la matrice ligne ${}^t yB$ et le produit ${}^t yx$, matrice à un seul coefficient. La matrice unité pour la multiplication dans $\mathfrak{M}$ est notée I.

D'autre part, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}$, le rang, la trace et le déterminant de A sont respectivement notés $\mathrm{rg}A$, $\mathrm{tr}A$ et $\mathrm{dét}A$; le spectre de A, c'est-à-dire la famille de ses valeurs propres, comptées chacune avec son ordre de multiplicité, est noté $\mathrm{sp}A$.

Enfin, on envisagera des endomorphismes $\Gamma, \Phi, \Phi', \Psi$ de *l'espace vectoriel* complexe $\mathfrak{M}$; on souligne que la multiplication des matrices dans $\mathfrak{M}$ n'intervient pas dans la définition de tels endomorphismes, c'est-à-dire que $\Gamma(AB)$, par exemple, peut être différent de $\Gamma(A)\Gamma(B)$.

I

On considère l'endomorphisme Γ de $\mathfrak{M}$ défini par $\Gamma(X) = -X + (\mathrm{tr}X)I$ pour tout $X \in \mathfrak{M}$.

1. Quels sont les sous-espaces propres de Γ, les valeurs propres associées et leurs ordres de multiplicité ?

2. L'endomorphisme Γ est-il diagonalisable ? Trouver un polynôme du second degré annulé par Γ. Donner la valeur explicite de $\Gamma^{-1}(X)$.

3.a. Si $n \geqslant 3$ et $\mathrm{rg}\,X = n$, distinguer d'après une condition liant $\mathrm{tr}X$ et $\mathrm{sp}X$ le cas où les rangs de X et de $\Gamma(X)$ sont égaux de celui où ils sont inégaux.

3.b. Si $n \geqslant 3$ et $\mathrm{rg}\,X < n$, distinguer d'après des conditions concernant $\mathrm{tr}X$ et $\mathrm{sp}X$ les cas $\mathrm{rg}\Gamma(X) = \mathrm{rg}X$, $\mathrm{rg}\Gamma(X) < \mathrm{rg}X$ et $\mathrm{rg}\Gamma(X) > \mathrm{rg}X$.

4. Si $n = 2$, comparer $\mathrm{rg}\Gamma(X)$ à $\mathrm{rg}X$, $\mathrm{dét}\Gamma(X)$ à $\mathrm{dét}X$ et $\mathrm{sp}\Gamma(X)$ à $\mathrm{sp}X$ et trouver les matrices unitaires A de déterminant 1 telles que, pour tout $X \in \mathfrak{M}$, $\Gamma(X) = A\,{}^t X\,A^*$.

II

Dans toute cette partie, Φ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}$ qui conserve le rang, c'est-à-dire tel que $\mathrm{rg}\Phi(X) = \mathrm{rg}X$ pour tout $X \in \mathfrak{M}$.

5.a. Montrer que les matrices de rang 1 de $\mathfrak{M}$ sont exactement celles de la forme $x\,{}^t y$ où x et y sont des éléments non nuls de E.

5.b. Montrer que les matrices de rang 2 de $\mathfrak{M}$ sont exactement celles de la forme $x\,{}^t y + z\,{}^t w$ où les 4 éléments x, y, z, w de E sont tels que x et z sont linéairement indépendants, et y et w linéairement indépendants.

Tournez la page S. V. P.

6.a. Soient x et y deux éléments non nuls de E. Vérifier qu'il existe deux éléments p, q de E tels que $\Phi(x\,{}^t y) = p\,{}^t q$. Pour x et y fixés, le couple (p, q) est-il unique ?

6.b. On fixe y_0 non nul dans E et on suppose qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 non nuls dans E et 4 éléments p_1, q_1, p_2, q_2 dans E tels que

$$\Phi(x_1\,{}^t y_0) = p_1\,{}^t q_1 \quad \text{et} \quad \Phi(x_2\,{}^t y_0) = p_2\,{}^t q_2 \quad ,$$

avec p_1 et p_2 linéairement indépendants. En considérant $\Phi((x_1 + x_2)\,{}^t y_0)$, montrer que q_1 et q_2 sont liés. Prouver alors qu'on peut choisir un élément fixe $q_0 \neq 0$ dans E tel que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in E$ vérifiant $\Phi(x\,{}^t y_0) = p\,{}^t q_0$.

6.c. Sous les mêmes hypothèses, établir l'existence d'une matrice inversible $A \in \mathfrak{M}$ telle que, pour tout $x \in E$, $\Phi(x\,{}^t y_0) = A\,x\,{}^t q_0$.

7. L'élément $y_0 \neq 0$ étant toujours fixé dans E, on conserve les notations de **6.b**, mais on suppose cette fois que le couple (p_1, p_2) est lié quel que soit le couple (x_1, x_2). Montrer qu'on peut choisir un élément fixe $p_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $q \in E$ vérifiant $\Phi(x\,{}^t y_0) = p_0\,{}^t q$ et en déduire qu'il existe une matrice inversible $B \in \mathfrak{M}$ telle que, pour tout $x \in E$, $\Phi(x\,{}^t y_0) = p_0\,{}^t x\,B$.

8. Afin de confronter entre elles les deux situations respectivement envisagées en **6.c** et **7**, on fait l'hypothèse suivante :

H Il existe deux éléments non nuls y_0 et y'_0 dans E, deux matrices inversibles A et B dans $\mathfrak{M}$ et deux éléments p_0 et q_0 dans E, tous indépendants de x, et tels que, pour tout $x \in E$,

$$\Phi(x\,{}^t y_0) = A\,x\,{}^t q_0 \quad \text{et} \quad \Phi(x\,{}^t y'_0) = p_0\,{}^t x\,B\,.$$

8.a. Montrer que y_0 et y'_0 sont linéairement indépendants.

8.b. En choisissant $x = A^{-1}p_0$ et x' linéairement indépendant de x, étudier le rang de $\Phi(x\,{}^t y_0 + x'\,{}^t y'_0)$ et en conclure que l'hypothèse **H** est inacceptable.

9. On suppose, dans cette question, comme dans les questions **6.b** et **6.c**, qu'il existe un élément y_0 non nul dans E, une matrice inversible $A \in \mathfrak{M}$ et un élément $q_0 \in E$ tels que, pour tout $x \in E$, $\Phi(x\,{}^t y_0) = A\,x\,{}^t q_0$.

9.a. Exprimer à l'aide de A, x et q_0 la matrice $\Phi(x\,{}^t y)$ pour $y = \lambda y_0$, où $\lambda \in \mathbf{C}$.

9.b. Soit y un élément de E linéairement indépendant de y_0. Etablir l'existence d'une matrice inversible A_1 et d'un élément $q \in E$, non colinéaire à q_0, tels que l'on ait

$\Phi(x\,{}^t y) = A_1 x\,{}^t q$ pour tout $x \in E$. Pour y fixé, le choix de A_1 est-il unique ?

9.c. Montrer qu'on peut choisir $A_1 = A$. En déduire qu'il existe une matrice inversible $B \in \mathfrak{M}$ telle que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$,

$$\Phi(x\,{}^t y) = A\,x\,{}^t y\,B\,.$$

9.d. Donner, pour tout $X \in \mathfrak{M}$, la valeur explicite de $\Phi(X)$.

9.e. A l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}$ on associe l'application trilinéaire φ de E^3 dans E définie pour tout triplet $(x, y, u) \in E^3$ par

$$\Phi(x\,{}^t y)u = \varphi(x, y, u)\,.$$

Tournez la page S. V. P.

Exprimer à l'aide de certaines des matrices A, B, x, y, u ou de leurs transposées, les matrices $L(u, y)$ et $M(u, x)$ respectivement associées dans la base canonique de E aux endomorphismes $x \mapsto \varphi(x, y, u)$ et $y \mapsto \varphi(x, y, u)$ de E.

Pour $y \neq 0$ fixé dans E, quel est le rang de l'application linéaire f de E dans $\mathfrak{M}$ définie par $f(u) = L(u, y)$? Quels sont les couples (A', B') de matrices inversibles tels que $\Phi({}^t x\, y) = A'\, {}^t x\, {}^t y\, B'$ pour tout couple $(x, y) \in E^2$?

Pour $x \neq 0$ fixé dans E, quel est le rang de l'application linéaire g de E dans $\mathfrak{M}$ définie par $g(u) = M(u, x)$?

10. On suppose, dans cette question, comme dans la question 7, qu'il existe un élément y_0 non nul dans E, une matrice inversible $B \in \mathfrak{M}$ et un élément $p_0 \in E$ tels que $\Phi({}^t x\, y_0) = {}^t p_0\, {}^t x\, B$ pour tout $x \in E$.

10.a. Vérifier que l'application Φ' définie sur $\mathfrak{M}$ par $X \mapsto \Phi'(X) = {}^t[\Phi(X)]$ est un endomorphisme qui conserve le rang. En donner la valeur explicite pour $X = x\, {}^t y_0$, puis pour $X = x\, {}^t y$ pour tout $y \in E$, puis pour X quelconque dans $\mathfrak{M}$.

10.b. En déduire la valeur explicite de $\Phi(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{M}$.

III

11. Dans cette question, Ψ désigne un endomorphisme de $\mathfrak{M}$ qui conserve le déterminant, c'est-à-dire tel que, pour tout $X \in \mathfrak{M}$, $\det\Psi(X) = \det X$.

Soient r le rang de $X \in \mathfrak{M}$, J_r et K deux matrices diagonales de $\mathfrak{M}$, de rangs respectifs r et $n - r$, et de somme I, matrice unité de $\mathfrak{M}$. On note Y la matrice équivalente à K par les mêmes changements de base que ceux qui traduisent l'équivalence de X à J_r.

11.a. Montrer que $\det(\rho X + Y)$ est, en fonction de $\rho \in \mathbf{C}$, un monôme dont on précisera le degré.

11.b. Soit s le rang de $\Psi(X)$. Montrer que $\det(\rho\Psi(X) + \Psi(Y))$ est un polynôme en ρ dont on comparera le degré à s. Comparer r à s. Montrer que Ψ est inversible.

11.c. Montrer que Ψ conserve le rang. En déduire, pour tout $X \in \mathfrak{M}$, les deux expressions possibles de $\Psi(X)$.

12. Dans cette question, Ψ désigne un endomorphisme de $\mathfrak{M}$ qui conserve le spectre, c'est-à-dire tel que, pour tout $X \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{sp}\Psi(X) = \mathrm{sp}X$. Il en résulte donc que Ψ conserve le déterminant et le rang.

12.a. En posant $G = [\Psi(I)]^{-1}$, comparer $\det(\rho I - G\Psi(X))$ à $\det(\rho I - X)$ pour tout $\rho \in \mathbf{C}$ et tout $X \in \mathfrak{M}$. En déduire l'égalité $\mathrm{sp}(GX) = \mathrm{sp}X$.

12.b. Montrer que $G = I$. En déduire les deux expressions possibles de $\Psi(X)$.

12.c. Déterminer la forme générale de ceux des endomorphismes Ψ en question qui, de plus, transforment toute matrice hermitienne en une matrice hermitienne.

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail